中国科学技术大学数学科学学院

2018 ～ 2019 学年第 1 学期期中考试试卷

课程名称 单变量微积分 课程编号 001512

考试时间 2018年11月17日 考试形式 闭卷

姓 名 ________ 学 号 ________ 学 院 ________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、求下列各极限 (每小题 6 分, 共 30 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$.

装 订 线

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x \sin x} - \cos x}{x^2}$.

(4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{\sqrt[x]{a}}{3} + \dfrac{2\sqrt[x]{b}}{3})^x$, 其中 a, b 为正实数.

(5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^{2018} x - x^{2018}}{x^{2020}}$.

二、(本题 10 分) 求$f(x) = \frac{1}{2x^2-1}$ 在 $x = 0$ 处的第 2018 阶导数值 $f^{(2018)}(0)$.

三、(本题 10 分) 设函数$y=y(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$$

所确定. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$ 和 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

线

订

装

四、(本题 10 分)

设$e < a < b < e^2$, 证明： $\ln^3 b - \ln^3 a > \dfrac{3}{e}(b-a)$.

五、(本题 10 分) 设 n 为正整数, $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可导函数, 满足: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f^{(n)}(x)| \le 1$.

(1) (5分) 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{n+1}} = 0$.

(2) (5分) 证明: 存在实数 L, 使得 $f(x) + x^{n+1}$ 在区间$(L, +\infty)$ 上为递增函数.

六、(本题 10 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的二阶可导函数, 满足: $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$, $f(1) = 0$. 试证明: 存在$x_0 \in (0,1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$.

七、(本题 20 分)设 $f(x)$ 为如下定义的 $\mathbb{R}$ 上的函数：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0;\\ 1, x=0.\end{cases}$$

(1) (10分) 求 $f'(x)$, 并证明 $f'(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) (5分)证明存在 $x_0\in\mathbb{R}$, 满足: $|f'(x_0)|<1$, 并且 $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f'(x)|\leq|f'(x_0)|$.

(3) (5分)设 $a\in\mathbb{R}$, 令 $x_1=a$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

参考答案

一. (1) 由于 $(1+\dfrac{1}{n})^{\frac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{3n}+o(\dfrac{1}{n})$, 从而

$$\sqrt[3]{n^3+n^2}-n=n((1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}}-1)=n(\frac{1}{3n}+o(\frac{1}{n}))=\frac{1}{3}+o(1)\to\frac{1}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}&=(n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}})^{n^2}\\&=(\frac{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^3}))}{1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})})^{n^2}\\&=(\frac{1-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2})}{1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})})^{n^2}\\&=((1-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))(1+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})))^{n^2}\\&=(1+\frac{1}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2}))^{n^2}\to e^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{e^{x\sin x}-\cos x}{x^2}&=\frac{1+x\sin x+\frac{x^2\sin^2 x}{2}+o(x^2\sin^2 x)-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}\\&=\frac{1+x(x+o(x))+o(x^2)-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}\to\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{x}}&=e^{\frac{1}{x}\ln a}&=1+\tfrac{\ln a}{x}+o(\tfrac{1}{x})\\b^{\frac{1}{x}}&=e^{\frac{1}{x}\ln b}&=1+\tfrac{\ln b}{x}+o(\tfrac{1}{x})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(\tfrac{a^{\frac{1}{x}}}{3}+\tfrac{2b^{\frac{1}{x}}}{3})&=\ln(1+\tfrac{a^{\frac{1}{x}}-1}{3}+\tfrac{2(b^{\frac{1}{x}}-1)}{3})\\&=\ln(1+\tfrac{\ln a}{3x}+\tfrac{2\ln b}{3x}+o(\tfrac{1}{x}))\\&=\tfrac{\ln a}{3x}+\tfrac{2\ln b}{3x}+o(\tfrac{1}{x})\end{aligned}$$

从而

$$x\ln(\frac{a^{\frac{1}{x}}}{3}+\frac{2b^{\frac{1}{x}}}{3})=\frac{\ln a}{3}+\frac{2\ln b}{3}+o(1)\to\frac{\ln a}{3}+\frac{2\ln b}{3}$$

故

$$(\frac{\sqrt[x]{a}}{3}+\frac{2\sqrt[x]{b}}{3})^x=e^{x\ln(\frac{a^{\frac{1}{x}}}{3}+\frac{2b^{\frac{1}{x}}}{3})}\to\sqrt[3]{ab^2}$$

(5)

$$\begin{aligned}\sin^{2018}x&=(x-\tfrac{x^3}{6}+o(x^3))^{2018}\\&=x^{2018}(1-\tfrac{x^2}{6}+o(x^2))^{2018}\\&=x^{2018}(1-2018(\tfrac{x^2}{6}+o(x^2))+o(x^2))\\&=x^{2018}-\tfrac{1009}{3}x^{2020}+o(x^{2020})\end{aligned}$$

从而

$$\frac{\sin^{2018} x - x^{2018}}{x^{2020}} \to -\frac{1009}{3}$$

二. 证法一: 由于 $f(x)(2x^2-1)=1$, 两边求 n 阶导数, 再利用莱布尼茨公式, 得到

$$f^{(n)}(x)(2x^2-1)+4nxf^{(n-1)}(x)+2n(n-1)f^{(n-2)}(x)=0$$

$\cdots\cdots$ (6分)

从而

$$f^{(n)}(0)=2n(n-1)f^{(n-2)}(0)$$

$\cdots\cdots$ (8分)

故

$$f^{(2018)}(0)=2^{1009}\times 2018!\times f(0)=-2^{1009}\times 2018!$$

$\cdots\cdots$ (10分)

证法二: $g(y)=\dfrac{1}{1-y}$ 在 $y=0$ 处的泰勒展开为

$$g(y)=1+y+y^2+\cdots+y^n+o(y^n), y\to 0.$$

$\cdots\cdots$ (4分)

因此当 $x\to 0$ 时,

$$f(x)=(-1)\frac{1}{1-2x^2}=(-1)(1+(2x^2)+(2x^2)^2+\cdots+(2x^2)^{1009}+o(x^{2018}))$$

$\cdots\cdots$ (8分)

由带皮亚诺余项的泰勒展开的唯一性, 知 $-2^{1009}=\dfrac{f^{(2018)}(0)}{2018!}$,从而

$f^{(2018)}(0)=-2^{1019}\times 2018!$

$\cdots\cdots$ (10分)

三.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 1-\cos t\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \sin t\end{aligned}$$

$\cdots\cdots$ (4分)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$\cdots\cdots$ (6分)

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^3}$$

$\cdots\cdots$ (8分)

从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1.$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

$\cdots\cdots$ (10分)

四. 由拉格朗日中值定理,

$$\frac{\ln^3 b-\ln^3 a}{b-a}=\frac{3\ln^2\psi}{\psi},\ e<a<\psi<b<e^2.$$

$\cdots\cdots$ (4分)

令 $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$, 则

$$f'(x)=\frac{2\ln x-\ln^2 x}{x^2}$$

从而当$e<x<e^2$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 为严格递增函数.

$\cdots\cdots$ (8分)

由此得 $\dfrac{3\ln^2\psi}{\psi}>\dfrac{3\ln^2 e}{e}=\dfrac{3}{e}$.

$\cdots\cdots$ (10分)

五. (1) 连续应用洛必达法则 n 次即得.

(2) 对 $f^{'}(x)$ 应用 (1) 的结论, 得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f^{'}(x)}{x^n}=0$.
$\cdots\cdots$ (2分)

令 $g(x)=f(x)+x^{n+1}$, 则

$$g^{'}(x)=f^{'}(x)+(n+1)x^n\to+\infty, x\to+\infty.$$

从而存在一个充分大的正数 L, 使得当$x>L$ 时, $g^{'}(x)>0$, 即 $g(x)$ 递增.
$\cdots\cdots$ (5分)

六. 对$f(x)$ 在$x=0$ 处作泰勒展开, 得到

$$f(x)=1+\frac{f^{''}(0)}{2}x^2+o(x^2).$$

$\cdots\cdots$ (3分)

由此, 存在充分小的正数 $\delta<1$, 使得当$x\in(0,\delta)$ 时, $f(x)>1$.
$\cdots\cdots$ (5分)

因此 $f(x)$ 在 区间$[0,1]$ 上的最大值一定在内部的一个点 x_0 上取到.
$\cdots\cdots$ (7分)

由费马定理知 $f^{'}(x_0)=0$.
$\cdots\cdots$ (10分)
七. (1) $f^{'}(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=0$.
$\cdots\cdots$ (3分)

$$f^{'}(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, x\neq0;\\ 0, x=0.\end{cases}$$

$\cdots\cdots$ (6分)

直接验证可得 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}=0$, 从而 $f^{'}(x)$ 为连续函数.
$\cdots\cdots$ (10分)

(2) 容易验证 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$, 又由于 $f'(x)$ 为连续函数, 知 $|f'(x)|$ 在$\mathbb{R}$ 上的最大值可以在一个点 x_0 处取到.

$\cdots\cdots$ (2分)

下面只需验证: $\forall x\in\mathbb{R}, |f'(x)|<1$.

又由于 $f'(x)$ 为奇函数, 故只需在 $(0,+\infty)$ 上验证不等式 $-1<f'(x)<1$. 由 (1) 中$f'(x)$ 的表达式, 只需验证:

$$\forall x>0, -x^2<x\cos x-\sin x<x^2.$$

这由当 $x>0$ 时, 导函数的不等式 $(-x^2)'<(x\cos x-\sin x)'<(x^2)'$ 立即可得.

$\cdots\cdots$ (5分)

(3) 由 (2), 存在实数 q, 满足 $0<q<1$, 并且对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 都有 $|f(x)-f(y)|<q|x-y|$, 从而 $f(x)$ 为压缩映射.

$\cdots\cdots$ (2分)

由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ 知$f(x)$ 为有界函数. 设$M>0$, 且 $f(\mathbb{R})\subset[-M,M]$. 则对任意正整数 k 和任意不小于2 的正整数 m,n, 成立以下估计:

$$x_{m+k}-x_{n+k}=f^k(x_m)-f^k(x_n)<q^k|x_m-x_n|\le 2q^kM.$$

由此知数列 $\{x_n\}$ 为柯西列, 从而收敛.

$\cdots\cdots$ (5分)